www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Durée : 4 heures

MATHÉMATIQUES

Groupe C

Nota bene. — *Bien que les différentes parties du problème ne soient pas indépendantes, seuls les résultats établis dans une partie (et non leurs preuves) sont éventuellement nécessaires à la résolution d'une question posée plus loin dans le problème.*

Par ailleurs, sauf mention explicite, on appellera brièvement « variable aléatoire » une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs.

I

Soit I un intervalle de la forme $[0, a[$ où a est soit un nombre réel strictement positif, soit $+\infty$. On pose $\mathring{\mathrm{I}} =]0, a[$.

A

Soit f une application continue et strictement croissante sur I. On note g son application réciproque définie sur $f(\mathrm{I})$. On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que f est dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}}$.

1. Établir l'identité :
$$xf(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t$$
pour tout $x \in \mathrm{I}$. Donner une interprétation graphique de cette identité.

2. En déduire l'inégalité :
$$xy \leqslant \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^y g(t)\,\mathrm{d}t$$
pour tout $x \in \mathrm{I}$ et tout $y \in f(\mathrm{I})$. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $y = f(x)$.

B

Une fonction $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite <u>de Young</u> sur I si elle vérifie les propriétés suivantes :

- φ est continûment dérivable sur I ;
- φ est deux fois dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}}$ avec $\varphi''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{\mathrm{I}}$;
- $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Soit φ une fonction de Young sur I. Justifier brièvement l'existence et la continuité de l'application réciproque de φ', notée φ'^{-1}.

On définit la <u>fonction duale</u> φ^* de φ par : $\varphi^*(y) = \int_0^y \varphi'^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout $y \in \varphi'(\mathrm{I})$.

1. Prouver que φ^* est une fonction de Young sur $\varphi'(\mathrm{I})$ et que $\varphi^{**} = \varphi$.

2. Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions de Young sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs fonctions duales :

   a. $x \longmapsto \dfrac{x^p}{p}$, pour $p > 1$;

   b. $x \longmapsto e^x - x - 1$;

   c. $x \longmapsto \mathrm{Log}(\mathrm{ch}\,x)$.

3. *a.* Prouver que : $xy \leqslant \varphi(x) + \varphi^*(y)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ et tout $y \in \varphi'(\mathrm{I})$ et préciser à quelle condition cette inégalité est une égalité.

   b. En déduire que : $\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{I}} (xy - \varphi(x))$, pour tout $y \in \varphi'(\mathrm{I})$.

Tournez la page S.V.P.

II

Dans cette partie, p est un nombre réel strictement plus grand que 1 et on pose $q = \dfrac{p}{p-1}$. Par ailleurs X et Y désignent deux variables aléatoires quelconques et on définit, pour tout $r \geqslant 1$, $\|X\|_r = (E(|X|^r))^{\frac{1}{r}}$.

1. Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ pour tout $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $y = x^{p-1}$.

2. En déduire que l'inégalité suivante (dite de Hölder) est satisfaite : $\|XY\|_1 \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q$ avec égalité si et seulement si il existe deux constantes positives et non toutes deux nulles λ et μ telles que l'événement $\lambda |X|^p = \mu |Y|^q$ soit de probabilité égale à 1.

III

Soit X une variable aléatoire centrée (c'est-à-dire telle que $E(X) = 0$) dont la plus grande valeur prise avec une probabilité non nulle est notée M.

On suppose que $M > 0$ et on définit : $\varphi_X(x) = \operatorname{Log} E(e^{xX})$, pour $x \geqslant 0$.

1. *a.* Prouver que φ_X est une fonction de Young sur $\mathbb{R}_+$.

   b. Montrer que ce résultat est préservé dans les deux cas suivants (bien que dans ces deux cas l'ensemble des valeurs possibles pour X soit manifestement infini) et calculer alors φ_X^* :

   - X suit une loi normale centrée et réduite ;
   - $X + 1$ suit une loi de Poisson de paramètre 1.

2. *a.* Montrer que φ_X^* est définie sur $[0, M[$ et que, pour tout $y \in [0, M[$, on a : $P(X > y) \leqslant \exp(-\varphi_X^*(y))$.

   (On pourra vérifier que $P(e^{tX} > t) \leqslant \dfrac{E(e^{tX})}{t}$ pour tout $t > 0$).

   Que vaut $P(X > y)$ lorsque $y \geqslant M$?

   b. Calculer φ_X^* lorsque X vaut 1 avec probabilité 1/2 et -1 avec probabilité 1/2.

3. Soit $\mathcal{J}$ un ensemble fini et $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et centrées. On pose $S = \sum_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Prouver que $\varphi_S(x) = \sum_{i \in \mathcal{J}} \varphi_{X_i}(x)$.

4. Soit B une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

   a. Déduire de 3. que, pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$, on a :

   $$P(2B - n > n\varepsilon) \leqslant \exp(-nh(\varepsilon))$$

   où $h(\varepsilon) = \dfrac{(1-\varepsilon)\operatorname{Log}(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)\operatorname{Log}(1+\varepsilon)}{2}$.

   b. Lorsque $n = 1681$ et $\varepsilon = 0{,}04$, évaluer grâce au théorème central limite la quantité $P(2B - n > n\varepsilon)$.

   Indication : $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \displaystyle\int_{1{,}64}^{+\infty} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$ vaut approximativement 0,05.

   Comparer cette valeur à la valeur correspondante du majorant obtenu en *a.*, puis à celle du majorant issu de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff. Quelles réflexions cela vous inspire-t-il ?

Tournez la page S.V.P.

IV

Soit $\mathcal{J}$ un ensemble fini, $(\varepsilon_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$. Soit $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille de nombres réels non nuls. On pose $S = \sum_{i\in\mathcal{J}} a_i\varepsilon_i$ et $M = \sum_{i\in\mathcal{J}} |a_i|$.

Le but de cette partie est d'établir, pour tout nombre réel p supérieur ou égal à 1, les deux résultats suivants :

i. il existe une constante $C(p) > 0$ telle que $\|S\|_p \leqslant C(p)\|S\|_2$;

ii. il existe une constante $c(p) > 0$ telle que $\|S\|_p \geqslant c(p)\|S\|_2$.

1. Calculer $\|S\|_2$.

2.

a. Démontrer que $\operatorname{Log}(\operatorname{ch} x) \leqslant \frac{x^2}{2}$ pour tout x.

b. Montrer que φ_S^* est définie sur $[0, M[$ et que $\varphi_S^*(s) \geqslant \frac{s^2}{2\|S\|_2^2}$ pour tout $s \in [0, M[$.

c. Établir l'inégalité : $P(|S| > s) \leqslant 2\exp\left(\frac{-s^2}{2\|S\|_2^2}\right)$, pour tout $s \geqslant 0$.

3. Pour toute fonction ψ continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\psi(0) = 0$, établir la formule :

$$\int_0^M \psi'(s)\,P(|S| > s)\,ds = E(\psi(|S|)).$$

(On pourra remarquer que $s \longmapsto P(|S| > s)$ est une fonction en escalier que l'on exprimera.)

4. Démontrer i. en utilisant les deux questions précédentes.

5. Soit $1 \leqslant r < s < t$. Démontrer les résultats suivants en appliquant judicieusement l'inégalité de Hölder démontrée en **II**.

a. $\|S\|_r \leqslant \|S\|_s$.

b. Il existe un unique couple (α, β) de nombres réels strictement positifs tels que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{t} = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

et alors $\|S\|_s \leqslant \|S\|_r^{\alpha}\|S\|_t^{\beta}$.

6. En déduire ii. (On pourra traiter tout d'abord le cas où $p \geqslant 2$).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail